一般化セミマルコフ過程による生産ラインの解析(数理モデルにおける最適化理論)

中出, 康一; 大野, 勝久

数理解析研究所講究録
947 巻 1996 年 178-187

一般化セミマルコフ過程による生産ラインの解析

名古屋工業大学　生産システム工学科　中出　康一 (Koichi Nakade)
名古屋工業大学　生産システム工学科　大野　勝久 (Katsuhisa Ohno)

1　はじめに

生産システムをはじめ，多くの現実のモデルは，状態が離散空間で，異なる事象が並行して進行し，事象が生起したときのみシステムの状態が変化する離散事象システム (Discrete Event System) として扱うことができる．離散事象システムに関する解析手法として，一般化セミマルコフ過程が，ペトリネットモデルや，perturbation analysis とともに知られている．一般化セミマルコフ過程の枠組みは Matthes[1] が提案し，Schassberger[2], Whitt[3] らにより，主に待ち行列モデルの非感度性などの研究に応用されている．近年，Glasserman, Yao 等により，一般化セミマルコフ過程の構造に注目し，ある性質を持つときの挙動特性について研究がなされている ([4]-[7])．

これまで個々の生産モデルについて，退去時刻や待ち時間等の再帰式の形から，確率順序や凸順序を用いた比較法により，パラメータや構造の異なるシステムの性能比較を行う研究がなされている．また，直列型生産ラインをはじめとしたいくつかのシステムについて，可逆性 (reversibility) などのシステム間の等価性を導く研究も多くなされている ([8]-[20])．これらのうち多くのモデルは一般化セミマルコフ過程を用いて定式化でき，Glasserman らが示した方法によりある程度の結果を得るとが可能であることが知られてきている．

本報告では，一般的なブロッキング構造をもつ，Fork/Join 型の開放型生産ラインについて，一般化セミマルコフ過程で定式化するとともに，異なるシステム間の性能比較をおこなう．

2　一般化セミマルコフ過程

本章では，一般化セミマルコフ過程 (generalized semi-Markov process) を定義し，その性質を示す．詳しくは [6],[7] を参照のこと．
S: 可算状態空間
A: 事象 (event) の集合（有限），$A=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_M\}$
$\mathcal{E}=\mathcal{E}(s)$: 状態 s で起こりうる事象の集合, $A=\cup_s\mathcal{E}(s)$ と仮定する．
$\phi(s,\alpha)$: 状態 s で事象αが起きたときの状態の推移先
$\omega_\alpha(n)$: 事象 α の n 回目の設定 clock． $\omega=\{(\omega_{\alpha_1}(n),\ldots,\omega_{\alpha_M}(n)),n=1,2,\ldots\}$
一般には，推移が確率的であったり，clock の進行速度が状態により変化する形で表現されるが，ここでは，推移が決定的で，進行速度を 1 とする．推移が確定的な GSMP を deterministic GSMP とよぶ．

GSMP の挙動
1. 初期状態を s_0とし，$n=0,\ \tau_0=0,\ n_{\alpha_i}=0,\ c_0(\alpha_i)=0,\ i\in A$ とおく．
時刻 0 において，$\alpha_i\in\mathcal{E}(s_0)$ ならば，事象α_iの clock$c_0(\alpha_i)$ を$\omega_{\alpha_i}(1)$ とセットし，$n_{\alpha_i}=1$ とする．

2. 時刻をτ_{n+1}まで進ませる．ここで

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \min_{\alpha_i \in \mathcal{E}(s_n)} \{c_n(\alpha_i)\}.$$

すなわち，$\mathcal{E}(s_n)$に属する事象のいずれかが起こるまで進ませる．この事象をα^*_{n+1}とする．(同一時刻に複数起こるときは，添字最小のものを選ぶ.)
3. 時刻τ_{n+1}において状態s_{n+1}は$\phi(s_n, \alpha^*_{n+1})$となる．時刻$\tau_{n+1}$において，各事象の clock $c_{n+1}(\alpha_i)$を次のようにセットする．

$$\begin{aligned}
\alpha_i \in \mathcal{E}(s_{n+1})/(\mathcal{E}(s_n)/\{\alpha^*_{n+1}\}) \quad &\Rightarrow \quad c_{n+1}(\alpha_i) = \omega_{\alpha_i}(n_{\alpha_i}+1),\ n_{\alpha_i} \leftarrow n_{\alpha_i}+1 \\
\alpha_i \in \mathcal{E}(s_{n+1}) \cap (\mathcal{E}(s_n)/\{\alpha^*_{n+1}\}) \quad &\Rightarrow \quad c_{n+1}(\alpha_i) = c_n(\alpha_i) - (\tau_{n+1} - \tau_n) \\
\alpha_i \notin \mathcal{E}(s_{n+1}) \quad &\Rightarrow \quad c_{n+1}(\alpha_i) = 0
\end{aligned}$$

$n \leftarrow n+1$, 2へ戻る．

$T_{\alpha_i}(n)$を事象α_iのn番目の生起時刻とし，$T_{\alpha_i} = \{T_{\alpha_i}(n); n = 1, 2, \ldots\}$, $T = (T_{\alpha_1}, \ldots, T_{\alpha_m})$とする．$n$番目が起こらなければ，$T_{\alpha_i}(n) = \infty$とおく．ここでは，任意の初期状態に対し，

$$P(\sup_{n>0} T_{\alpha_i}(n) = \infty) = 1$$

が成り立つと仮定する．確率1で$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\alpha_i}(n) = \infty$, $i = 1, 2, \ldots, M$ならばこの仮定は成り立つ．tまでにα_iが起きた回数を$D_{\alpha_i}(t) = \sup\{n \geq 0; T_{\alpha_i}(n) \leq t\}$とし，$D_{\alpha_i} = \{D_{\alpha_i}(t), t \geq 0\}$, $D = (D_{\alpha_1}, \ldots, D_{\alpha_M})$とする．

GSMP から時間要素を取り除いた，過程の構造を表す部分を 一般化セミマルコフスキーム (GSMS) といい，$\mathcal{G} = (S, A, \mathcal{E}, \phi)$と表す．また，事象列$\sigma = \beta_0\beta_1 \cdots \beta_n$（有限長）を string と呼ぶ．

定義 2.1
ある事象$\beta_0 \in \mathcal{E}(s_0)$かつある状態列$s_1, \ldots, s_{k+1}$が存在し，$\beta_i \in \mathcal{E}(s_i)$, $s_{i+1} = \phi(s_i, \beta_i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$が成り立つとき，$\sigma = \beta_0\beta_1 \ldots \beta_k$は$s_0$で feasible であるという．■

string $\sigma\alpha$ が s で feasible であるとき，

$$\phi(s, \sigma\alpha) := \phi(\phi(s, \sigma), \alpha), \quad \phi(s, null) := s$$

と定義する．string σに対し, $[\sigma]_i$を事象α_iの生起回数を表すとする．$[\sigma] = \{[\sigma]_1, \ldots, [\sigma]_M\}$を$\sigma$の score とよぶ．

以下に，deterministic GSMS に関する各種の性質を定義する．

定義 2.2
1) noninterruptive: $\alpha, \beta \in \mathcal{E}(s), \alpha \neq \beta \Rightarrow \beta \in \mathcal{E}(\phi(s, \alpha))$, $\quad s \in S$.
2) permutable: σ_1, σ_2 が s_0で feasible であるとき，以下が成り立つ．

$$[\sigma_1] = [\sigma_2] \Rightarrow \mathcal{E}(\phi(s_0, \sigma_1)) = \mathcal{E}(\phi(s_0, \sigma_2)).$$

3) strong permutable: σ_1, σ_2 が s_0で feasible であるとき，以下が成り立つ．

$$[\sigma_1] = [\sigma_2] \Rightarrow \phi(s_0, \sigma_1) = \phi(s_0, \sigma_2).$$

4) (M) (Monotonicity condition): s でσ_1, σ_2が feasible であるとき，$[\sigma_1] \leq [\sigma_2]$ ならば，

$$\mathcal{E}(\phi(s, \sigma_1)) - A_{\sigma_1, \sigma_2} \subseteq \mathcal{E}(\phi(s, \sigma_2))$$

が成り立つ．ここで $A_{\sigma_1,\sigma_2} = \{\alpha_i; [\sigma_1]_i < [\sigma_2]_i\}$ である．
5) (C) (Commuting condition):

$$\alpha, \beta \in \mathcal{E}(s) \Rightarrow \beta \in \mathcal{E}(\phi(s, \alpha)),\ \alpha \in \mathcal{E}(\phi(s, \beta)), \quad \phi(s, \alpha\beta) = \phi(s, \beta\alpha).$$

6) (CX): Convexity condition: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$が feasible であるとき，

$$[\sigma_3] \geq [\sigma_1] \wedge [\sigma_2] \Rightarrow \{\mathcal{E}(\sigma_1) \cap \mathcal{E}(\sigma_2)\} - A_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3} \subseteq \mathcal{E}(\sigma_3)$$

が成り立つ．ここで $A_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3} = \{\alpha_i; [\sigma_3]_i > [\sigma_1]_i \wedge [\sigma_2]_i\}$ であり，$x \wedge y = (\min\{x_1, y_1\}, \min\{x_2, y_2\}, \ldots, \min\{x_M, y_M\})$ である． ■

このとき，次の結果が知られている．

補題 2.1
i) (M) $\Leftrightarrow$ noninterruptive and permutable,
ii) (C) $\Leftrightarrow$ noninterruptive and strong permutable ,
iii) (CX)$\Leftrightarrow$ noninterruptive and $\{[\sigma_3] \geq [\sigma_1] \wedge [\sigma_2] \Rightarrow \{\mathcal{E}(\sigma_1) \cap \mathcal{E}(\sigma_2)\} \subseteq \mathcal{E}(\sigma_3)\}$. ■

次に，GSMS $\mathcal{G}$の characteristic function を定義する．

定義 2.3
各 string σ及び事象$\alpha \in A$ に対し，

$$\chi_\alpha(\sigma) = [\sigma]_\alpha + 1\{\alpha \in \mathcal{E}(\sigma)\}$$

と定義する．$\chi(\sigma) = \{\chi_{\alpha_1}(\sigma), \ldots, \chi_{\alpha_M}(\sigma)\}$ とするとき，χを GSMS $\mathcal{G}$の characteristic function とよぶ． ■

特に，GSMS$\mathcal{G}$が permutable ならば，χを$\chi_\alpha(x) = x_\alpha + 1\{\alpha \in \mathcal{E}(x)\}$, $\quad \chi(x) = \{\chi_{\alpha_i}(x)\}$ と書くことにする．

補題 2.2
i) GSMS$\mathcal{G}$が性質 (M) を満たす$\Leftrightarrow$ $\chi(x)$ は x について増加関数である，すなわち，feasible strings σ, σ' について，$x = [\sigma], y = [\sigma']$ と置くとき，$x \leq y$ ならば，$\chi(\sigma) \leq \chi(\sigma')$ が成り立つ．
ii) GSMS$\mathcal{G}$が性質 (CX) を満たす$\Leftrightarrow$ $\chi(x)$ は x について増加かつ supermodular 関数である．ここで，$\chi(x)$ が supermodular であるとは，すべての feasible な $x, y, x \wedge y, x \vee y \in \mathcal{N}$ について，

$$\chi(x) + \chi(y) \leq \chi(x \wedge y) + \chi(x \vee y) \tag{1}$$

が成り立つことをいう. ■

$\mathcal{G}$は permutable であるとき, $\mathcal{N} = \{x \in Z_+^m : x = [\sigma] \text{ for } \sigma{:}s_0 \text{で feasible}\}$ を $\mathcal{G}$の score space と呼ぶ. $x = [\sigma]$ に対し, $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}(\phi(s,\sigma))$, $\mathcal{N}_{\alpha,n} = \{x \in \mathcal{N} : x_\alpha = n-1, \alpha \in \mathcal{E}(x)\}$ とおく. $\mathcal{N}_{\alpha,n}$の各要素ごとの minimal elements を $x^j(\alpha,n)$ $(j = 1,2,\ldots)$ と定義する. すなわちすべての $x \in \mathcal{N}_{\alpha,n}$ に対し,

$$x \geq x^j(\alpha,n) \text{ for some } j, \quad x \not< x^j(\alpha,n) \text{ for all } j$$

が成り立つ.

補題 2.3
i) $\mathcal{G}$が性質 (M) を満たすならば,

$$T_\alpha(n) = \omega_\alpha(n) + \min_j \max_{\beta \in A}\{T_\beta(x^j_\beta(\alpha,n))\},$$

かつ $\mathcal{N}$は max closed, すなわち $x, y \in \mathcal{N} \Rightarrow x \vee y \in \mathcal{N}$.
ii) さらに, $\mathcal{G}$が性質 (CX) を満たすならば, $\mathcal{N}$は min closed, すなわち $x, y \in \mathcal{N} \Rightarrow x \wedge y \in \mathcal{N}$が成り立つ. minimal element は唯一となって

$$T_\alpha(n) = \omega_\alpha(n) + \max_{\beta \in A}\{T_\beta(x_\beta(\alpha,n))\}.$$

が成り立つ. ■

補題 2.4
$\omega_\alpha = \{\omega_\alpha(n), n = 1,2,\ldots\}$ は互いに独立な確率変数列であり, 異なる事象間は互いに独立であるとする. このとき, GSMS $\mathcal{G}$ が (M) を満たすならば,

$$\omega_{\alpha_i}(n) \leq_{st} \omega'_{\alpha_i}(n) \quad \text{for all } i,\ n \Rightarrow T_{\alpha_i}(n) \leq_{st} T'_{\alpha_i}(n) \quad \text{for all } i,\ n$$

が成り立つ. さらに, (CX) を満たすならば,

$$\omega_{\alpha_i}(n) \leq_{icx} \omega'_{\alpha_i}(n) \quad \text{for all } i,\ n \Rightarrow T_{\alpha_i}(n) \leq_{icx} T'_{\alpha_i}(n) \quad \text{for all } i,\ n$$

が成り立つ. ここで, $\leq_{st}$, $\leq_{icx}$は, おのおの（通常の）確率順序, 非減少凸順序を表す. ■

3 Fork/Join 型多段生産システム

本節では, 直列型有限バッファ生産ラインを含めた, Fork/Join 型の多段生産システムを考察する. 一般化セミマルコフ過程に定式化し, 前節の結果を用いて, いくつかの結果を得る.

3.1 モデル

M台の加工ステーションからなる多段型生産ラインを考える. 各ステーション $i(i = 1,2,\ldots,M)$ はステーション $j \in U(i)$ から一つずつうけとり, 加工をした後, 各ステーション $k \in D(i)$ に一つずつ完成品を送るものと仮定する. このとき, ステーション i はパラメータ (a,b,c) をもち, 加工

は次の規律に従う．

1. 加工を終えたステーション $k \in D(i)$ への仕掛品は，次のいずれかの条件を満たす限り，ステーション i にとどまる．そうでなければ，ステーション kに進む．

a) ステーション i の加工を終え，かつ kでの加工を終えていないステーション kにある仕掛品の数が a_{ik}である．

b) kのある後工程のステーション $k' \in D(k)$ について，a) の仕掛品の数，および kの加工を終え，まだステーション k内にとどまっている k'へ向かう仕掛品の数の和が $c_{ikk'}$に達している．

2. 各ステーション $j \in U(i)$ からの仕掛品がすべてそろい，かつすべての $k \in D(i)$ について，1. によりステーション i にとどまっている仕掛品の数が b_{ik}に達していないとき，ステーション i は次の加工を行うことができる．ただし，$b_{ik} = 0$ のときは，すべての $k \in D(i)$ 側が i からの仕掛品を受け入れ可能な状態である（すなわち，1. の a),b) のどちらの条件も満たさない）時のみ加工を行うことができることを意味する．

ステーション i が外部（無限量）からの供給を受けるとき，$0 \in U(i)$, また加工した完成品がただちに外部に引き取られる場合は，$M+1 \in D(i)$ とする．a, b, c の間には，次の関係式が成り立つと仮定する．各 $i = 1, 2, ..., M$, $j \in U(i)$, $k \in D(i)$ について，

$$a_{ji} \geq 1, \quad b_{ik} \geq 0, \quad a_{ji} + b_{ik} \geq c_{jik}, \quad c_{ji\ M+1} = a_{ji}.$$

ただし，$a_{0i}, c_{0ik}, b_{i,M+1}$は意味を持たないので，特に定義しない．

本研究では，$i_t \in D(i_{t-1})\ (t = 1, \ldots, k)$, $i_0 \in D(i_k)$ となるようなステーション列 $(i_0, i_1, \ldots, i_k)$ は存在しないものと仮定する．各ステーション i では，初期においてステーション $j \in U(i)$ で加工を終えた仕掛品が $m_{ji}(0 \leq m_{ji} \leq a_{ji})$ 個存在すると仮定する．ステーション i での n 番目の加工時間を $S_i(n)$，加工終了時刻を $T_i(n)$ で表す．

3.2 一般化セミマルコフ過程への定式化

s_{ik}を，ステーション i で加工を終え，kで加工を終えていない仕掛品の数を表すものとし，α_iは，ステーション i での加工を表すとする．このとき，次の補題を得る．

補題 3.1 ステーション i で加工可能となる必要十分条件は，

1) $s_{ji} > 0$ for all $j \in U(i)/\{0\}$, かつ

2) $\displaystyle\sum_{(i_t, i_{t+1}) \in I} s_{i_t, i_{t+1}} < u_I$ for all $I \in L(i)$

が成り立つことである．ここで

$$L(i) = \{(i_0, i_1, \ldots, i_t); i_0 = i, i_1 \in D(i_0), i_2 \in D(i_1), \ldots, i_t \in D(i_{t-1}), i_t \neq M+1, t \geq 1\}$$

であり，各 $I = (i_0, i_1, \ldots, i_t) \in L(i)$ について，

$$u_I = b_{i_0, i_1} + \sum_{j=1}^{t-1} c_{i_{j-1}, i_j, i_{j+1}} + a_{i_{t-1}, i_t},$$

とする．すなわち，$L(i)$ は i で加工される仕掛品が通る可能性のある加工順列の集合である． ■

これにより，本モデルは以下のように GSMS に定式化される．

状態空間 $S = \{(s_1, \ldots, s_M); s_i = (s_{ik}; k \in D(i)/\{M+1\})\}$

初期状態 $s_0 = \{(m_{ij})\}$ 事象空間 $A = \{\alpha_i; i = 1, \ldots, M\}$: α_iはステーション i での加工終了を表す事象

各状態の事象集合 $\mathcal{E}(s) = \{\alpha_i; s_{ji} > 0 \text{ for all } j \in U(i)/\{0\}, \sum_{(i_t,i_{t+1})\in I} s_{i_t,i_t+1} < u_I \text{ for all } I \in L(i)\}$,

推移法則$\phi(s, \alpha_i) = s - \sum_{j\in U(i)/\{0\}} e_{ji} + \sum_{k\in D(i)/\{M+1\}} e_{ik}$,

ここで，e_{ij}は ij要素のみ 1 をとる単位ベクトルである.

x_iを事象α_iの生起回数とするとき，s と x は次の関係式をもつ.

$$s_{ik} = m_{ik} + x_i - x_k, \quad i = 1, \ldots, M, \quad k \in D(i)/\{M+1\}.$$

このとき，GSMS$\mathcal{G} = (S, A, \mathcal{E}, \phi)$ について次の定理が成り立つ.

定理 3.1

$\mathcal{G}$は性質 (CX) を満たす.

Proof. (M) を満たすのは明か. (1) 式が成り立つことを示して，補題 2.2 を用いる. ■

これにより，次の結果を得る.

定理 3.2

$$\begin{aligned} T_i(n) &= S_i(n) + \max\Bigg\{T_i(n-1), \max_{j\in U(n)}\{T_i(n-m_{ji})\}, \\ &\quad \max_{k\in\tilde{D}(i)}\Bigg\{T_k\Bigg(n - \min_{(i_0,\ldots,i_t)\in L(i), i_t=k}(u_{(i_0,\ldots,i_t)} - \sum_{j=0}^{t-1} m_{i_j,i_{j+1}})\Bigg)\Bigg\}\Bigg\} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで，$\tilde{D}(i)$ は, $L(i)$ に属する $(i_0, i_1, \ldots, k)$ が存在するステーションの集合を表す.

Proof. 補題 2.3, 補題 3.1 を用いる. ■

定理 3.3

同じモデルについて，二つの作業列$\omega = \{S_i(n); i = 1, \ldots, M, n = 1, 2, \ldots\}$ $\omega' = \{S'_i(n); i = 1, \ldots, M, n = 1, 2, \ldots\}$ を考え，おのおののステーション i での n 番目の加工完了時刻を $T_i(n)$,$T'_i(n)$ とする. ω, ω'は独立な確率乱数列であり，$S_i(n) \leq_{icx} S'_i(n)$ ならば，$T_i(n) \leq_{icx} T'_i(n)$ が成り立つ.

Proof. 補題 2.4 より明らか. ■

3.3 システムの可逆性と等価性

前節で与えたシステムに対し，すべての向きを逆にした以下のパラメータ $m^r_{ij}, U^r(i), D^r(i)$ を持つ reversed system を考察する.

1) 各 $i = 1, 2, \ldots, M$に対し,

$$U^r(i) = D(i), \quad D^r(i) = U(i), \quad m^r_{ij} = m_{ji} \quad j \in D^r(i)$$

ただし，$M+1 \in D(i)$ ならば $0 \in U^r(i)$, $0 \in U(i)$ ならば $M+1 \in D^r(i)$ とする.

2) すべての $(i_0, i_1, \ldots, i_t) \in L(i)$ について,

$$u^r_{i_t,i_{t-1},\ldots,i_1,i_0} = u_{i_0,i_1,\ldots,i_{t-1},i_t}$$

が成り立つ．

条件 2) は，次の a)-d) のいずれかが成り立てばよい．すべての $i=1,\ldots,M, j\in U(i), k\in D(i)$ について，

a) $a^{\tau}_{ij}=b_{ji}$, $b^{\tau}_{ki}=a_{ik}$, $c^{\tau}_{kij}=c_{jik}$,

b) ある定数 b が存在し，$b_{ik}=b$, $a_{ji}+b=c_{jik}$, $a^{\tau}_{ij}=a_{ji}$, $b^{\tau}_{ki}=b$, $c^{\tau}_{kij}=a^{\tau}_{ki}+b$ が成り立つ．

c) ある定数 b および $d_i(i=1,\ldots,M)$ が存在し，$a_{ji}=c_{jik}=d_i$ for all j, k, $b_{ik}=b$, $a^{\tau}_{ij}=a_{ji}=d_i, b^{\tau}_{ki}=b, c^{\tau}_{kij}=a^{\tau}_{ki}=d_k$ が成り立つ．

d) ある定数 $d_i(i=1,\ldots,M)$ が存在し，$a_{ji}=c_{jik}=b_{ik}=d_i$ for all j, k, $a^{\tau}_{ij}=d_j, b^{\tau}_{ki}=d_k, c^{\tau}_{kij}=d_i$ が成り立つ．(a) の特別な場合)

このとき，次の結果を得る．

定理 3.4 各ステーション i において，加工時間列 $\{S_i(n), n=1,2,\ldots\}$ が独立で同一の確率分布に従うものとする．このとき，

$$\max_{i=1,\ldots,M} T^{\tau}_i(n)=_{st}\max_{i=1\ldots,M} T_i(n),$$

が成り立つ．

Proof. システムは (CX) を満たすことから，補題 2.3 の minimal element が存在する．$x_{\alpha_j}(\alpha_i,m)=m'$であることを $(j,m')\to(i,m)$ で表し，すべてのステーションの組 (i,j) について $(i,1)$ から (j,n) へのすべての path $(i,1)\to\cdots\to(j,n)$ の集合をΠとすると，補題 2.3 より，

$$\max_{i=1,\ldots,M} T_i(n)=\max_{\pi\in\Pi}\sum_{(i,n)\in\pi} S_i(n)$$

が成り立つ．reversed system において，同様に $x^{\tau}_{\alpha_i}(\alpha_j,m')=m$ であることを $(i,m)\to^{\tau}(j,m')$ で表し，すべてのステーションの組 (i,j) について $(i,1)$ から (j,n) へのすべての path $(i,1)\to^{\tau}\cdots\to^{\tau}(j,n)$ の集合を Pi^{τ} とするとき，

$$\max_{i=1,\ldots,M} T^{\tau}_i(n)=\max_{\pi^{\tau}\in\Pi^{\tau}}\sum_{(i,n)\in\pi^{\tau}} S^{\tau}_i(n)$$

となる．reversed system における $(i,m)\to^{\tau}(j,m')$ と元のシステムの $(j,n+1-m')\to(i,n+1-m)$ が 1 対 1 で対応づけることができるので，結果を得る． ■

次に，すべての $i\in\{1,\ldots,M\}, j\in U(i), k\in D(i)$ について，

$$a_{ji}+b_{ik}=c_{jik}$$

が成り立つとする．このとき，$I=\{i_0,\ldots,i_t\}\in L(i_0)$ について，$I_1=\{i_0,\ldots,i_j\}, I_2=\{i_j,\ldots,i_t\}$ とすると，$u_I=u_{I_1}+u_{I_2}$が成り立つことに注意すると，定理 3.2 の式が

$$T_i(n)=S_i(n)+\max\left\{T_i(n-1),\max_{j\in U(i)}\{T_j(n-m_{ji})\},\max_{k\in D(i)}\{T_k(n-(u_{(i,k)}-m_{ik}))\}\right\}$$

と表すことができる（ブロッキングが a_{ik}の条件にのみ起こるため）．$u_{(i,k)}=b_{ik}+a_{ik}$に注意する．このとき，次のシステム lを考える．

$j_q\in D(i_q)$ なるいくつかの組 $(i_1,j_1),\ldots,(i_p,j_p)$ について，

$$i_q=D^l(j_q),\quad m^l_{j_qi_q}=u_{i_qj_q}-m_{i_qj_q},\quad a^l_{(j_q,i_q)}=a_{(i_q,j_q)}\quad b^l_{(j_q,i_q)}=b_{(i_q,j_q)}$$

かつすべての i, $j \in U^l(i)$, $k \in D^l(i)$ について $c^l_{jik} = a_{ji} + b_{ik}$とする．これ以外の組は元のシステムと変わらないものとする．ただし，これにより $U^l(i) = \phi$, $D^l(i) = \phi$ となるときは，おのおの $U^l(i) = \{0\}$, $D^l(i) = \{M+1\}$ システム lは，元のシステムのうちいくつかの隣接したステーションの組について，処理順序を逆向きにし，かつ初期在庫数を初期の空き在庫数に置き換えたものである．このとき，次の定理を得る．

定理 3.5
同一のサービス時間 $S_i(n)$ をもつとき，すべての i, n について，$T^l_i(n) = T_i(n)$ が成り立つ．
Proof. 漸化式が一致する． ■

4 例

4.1 (a,b,k) 直列システム

$U(i) = \{i-1\}$, $D(i) = \{i+1\}$ となるシステムを考える．このとき，Chang and Yao[13], Glasserman and Yao[5] などで知られた (a,b,k) システムと一致する．とくに，$a_{ii+1} = c_{ii+1i+2} = k_{i+1}$のとき，$b_{ii+1} = 0$ ならば通信ブロッキング，$b_{ii+1} = 1$ ならば生産ブロッキング，$b_{ii+1} = k_i$ならかんばん型ブロッキング（ステーション i は k_i個のかんばんを持つ）となる．このとき，定理 3.3 より凸性が成り立ち，定理 3.4 より，これまで得られた可逆性の結果を与える．さらに，通信ブロッキングについては定理 3.5 も適用できる．

4.2 単純な Fork/Join システム

各ステーションは入力 $U(i)$, 出力 $D(i)$ の一方のみが複数のステーションを持ち，さらに $b_{ji} = 0, c_{jik} = a_{ji}$ が成り立つシステムを考える．このとき，入力が複数のステーションは Join 型，出力が複数のステーションは Fork 型となり，二つのステーション間は容量 a_{ji}のバッファでつなげた単純な Fork/join システムになる．(Join 型ステーション i では，サービスが完了するまで i の手前のバッファにとどまるものとする.）このとき，定理 3.3 より凸性が示され，さらに定理 3.4, 3.5 を適用することができる．定理 3.4, 3.5 については，[16]-[18] で（ GSMP を使わずに) 示したことと一致する．

5 終わりに

GSMP において，事象生起時間が指数分布にしたがう場合については，GSMS の同期化による性能比較や，マルコフ決定過程の定式化による最適制御政策の単調性の解析などの研究がなされている．

上記以外の，たとえば閉路をもつ生産ラインの場合，デッドロックが起きないことを示す必要がある．この点が証明されれば，本論と同様の結果が得られることが期待される．また，状態空間が既約であれば，GSMS のサブスキームの議論を用いてなお多くの性能比較を行うことができる．状態間の可到達性やデッドロックについては，ペトリネットの理論との関連を含めて考察する必要がある．

参考文献

[1] Matthes, K., Zur Theorie der Bedienungsprozess, *Trans. 3rd Prague Conf. Inform. Theory, Statist. Dec. Funct., Random Processes*, 513-528, Prague, 1962.

[2] Schassberger, R., On the Equilibruim Distribution of a Class of Finite-State Generalized Semi-Markov Processes, *Mathematics of Operations Research*, vol. 1, 395-406, 1976.

[3] Whitt, W., Continuity of Generalized Semi-Markov Processes, *Mathematics of Operations Research*, vol. 5, 494-501, 1980.

[4] Glasserman, P. and Yao, D. D., "Algebraic Structure of Some Stochastic Discrete-Event Systems, with Applications," *Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications*, vol. 1, 7-35, 1991.

[5] Glasserman, P. and Yao, D. D., "Structured Buffer-Allocation Problems," Working Paper, 1992.

[6] Glasserman, P. and Yao, D. D., "A GSMP Framework for the Analysis of Production Lines," in *Stochastic Modeling and Analysis of Manufacturing Systems*, Yao, D. D. Editor, Chapter 4 (pp.133-188), Springer-Verlag, New York, 1994.

[7] Glasserman, P. and Yao, D. D., *Monotone Structure in Discrete-Event Systems*, Wiley, New York, 1994.

[8] Buzacott, J. A. and Shanthikumar, J. G., *Stochastic Models of Manufacturing Systems.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.

[9] Avi-itzhak, B. and Yadin, M., A Sequencing of Two Servers with No Intermediate Queue, Management Science, vol. 11, 553-564, 1965.

[10] Muth, E. J., The Reversibility Property of Production Lines, Management Science, vol. 25, 152-158, 1979.

[11] Yamazaki, G. and Sakasegawa, H., Properties of Duality in Tandem Queueing Systems, Annals of the Institute of Statistical Mathematics vol. 27, 201-212, 1975.

[12] Yamazaki, G., Kawashima, T. and Sakasegawa, H., Reversibility of Tandem Blocking Queueing Systems, Management Science, vol. 31, 78-83, 1985.

[13] Cheng, D. W. and Yao, D. D., "Tandem Queues with General Blocking: A Unified Model and Comparison Results," *Journal of Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications*, vol. 2, 207-234, 1993.

[14] Cheng, D. W., "Line Reversibility of Tandem Queues with General Blocking," *Management Science*, vol. 41, 864-873, 1995.

[15] Tayur, S. R., "Properties of Serial Kanban Systems," *Queueing Systems*, vol. 12, 297-318, 1992.

[16] Ammer, M. H. and Gershwin, S. B., "Equivalence Relations in Queueing Models of Fork/Join Networks with Blocking," *Performance Evaluation*, vol. 10, 233-245, 1989.

[17] Dalley, Y. and Towsley, D., "Symmetric Property of the Throughput in Closed Tandem Queueing Networks with Finite Buffers," *Operations Research Letters*, vol. 10, 541-547, 1991.

[18] Paik, C. -H. and Tcha, D. -W., "Throughput Equivalence in Fork/Join Queueing Networks with Finite Buffers and General Service Times," *International Journal of Production Research*, vol. 33, 695-703, 1995..

[19] Nakade, K. and Ohno, K., "Reversibility and Dependence in a U-Shaped Production Line," to appear in *Queueing Systems*, 1995.

[20] Nakade, K. and Ohno, K., "Analysis of Cycle Times of a U-Shaped Production Line," Working Paper, 1995.